ECOLE POLYTECHNIQUE

CONCOURS 1976

OPTION P'

PREMIERE COMPOSITION DE MATHEMATIQUES (4h)

Notations -

- $\mathbb{N}$ désignera l'ensemble des entiers naturels,

  $\mathbb{Z}$ désignera l'ensemble des entiers relatifs,

  $\mathbb{R}$ désignera l'ensemble des réels,

  $\mathbb{C}$ désignera l'ensemble des nombres complexes.

Pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$, on désignera par $\mathrm{Re}\,\alpha$ et $\mathrm{Im}\,\alpha$ les nombres réels tels que $\alpha = \mathrm{Re}\,\alpha + i\,\mathrm{Im}\,\alpha$.

- La borne supérieure sera notée sup, et la limite sera notée lim.

La notation $(u_n \mid n \in \mathbb{N})$ désignera la suite de terme général u_n, n décrivant $\mathbb{N}$; on pourra la noter aussi $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

- E désigne l'espace vectoriel, sur le corps $\mathbb{C}$, des applications f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, continues et périodiques de période 1 (c'est-à-dire $f(x+\lambda) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $\lambda \in \mathbb{Z}$). Pour tout $f \in E$, on désignera par f' la dérivée (si elle existe) de f.

PARTIE I

1 - Quel que soit $f \in E$ et quels que soient les réels a et b tels que $a < b$, on pose

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b \mathrm{Re}\, f(x)\,dx + i \int_a^b \mathrm{Im}\, f(x)\,dx .$$

a) Montrer que $f \mapsto \int_a^b f(x)\,dx$ est une forme $\mathbb{C}$-linéaire sur l'espace vectoriel E.

b) Soit $f \in E$; on pose $g = \gamma f$, où

$\gamma = 0$, si $\int_a^b f(x)\,dx = 0$,

$\gamma = \left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \cdot \left(\int_a^b f(x)\,dx\right)^{-1}$, si $\int_a^b f(x)\,dx \neq 0$.

Montrer que $\int_a^b \mathrm{Im}\, g(x)\,dx = 0$; en déduire que $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$.

c) Montrer que, pour tout $a \in \mathbb{R}$ et tout $f \in E$, on a

$$\int_a^{a+1} f(x)\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx .$$

.../...

2 - Pour tout $f \in E$, on pose

$$N_p(f) = \left(\int_0^1 |f(x)|^p \, dx\right)^{1/p} \quad \text{si } 0 < p < \infty, \quad N_\infty(f) = \sup_{0 \leq x \leq 1} |f(x)| .$$

a) Pour tout $p \in]0, \infty]$, montrer que $f = 0$ si et seulement si $N_p(f) = 0$.

b) A-t-on l'égalité $N_p(\alpha f) = |\alpha| N_p(f)$ pour tout $p \in]0, \infty]$, tout $\alpha \in \mathbb{C}$ et tout $f \in E$?

c) Montrer que N_1 et N_∞ sont des normes sur E.

d) Montrer que, pour tout $f \in E$, on a $\sup_{0 < p < \infty} N_p(f) = N_\infty(f)$.

3 - Pour tout $(f, g) \in E \times E$, on pose

$$(f \mid g) = \int_0^1 f(x) \, \overline{g(x)} \, dx .$$

a) Montrer que la forme $(f, g) \mapsto (f \mid g)$ est un produit scalaire hermitien sur E. En déduire que $N_1(f) \leq N_2(f)$ pour tout $f \in E$.

b) Pour tout $\lambda \in \mathbb{Z}$ et tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $\chi_\lambda(x) = e^{2i\pi\lambda x}$. Montrer que $(\chi_\lambda \mid \chi_\mu) = 0$ si $\lambda \neq \mu$. Calculer $N_p(\chi_\lambda)$ pour tout $\lambda \in \mathbb{Z}$ et tout $p \in]0, \infty]$.

PARTIE II

1 - Soient f et g deux éléments de E. Pour tout $y \in \mathbb{R}$, on pose

$$(f * g)(y) = \int_0^1 f(y - x) \, g(x) \, dx .$$

a) Montrer que $f * g = g * f$.

b) Montrer que $f * g$ appartient à E, et que $N_\infty(f * g) \leq N_\infty(f) \, N_1(g)$.

2 - Soit $(g_n \mid n \in \mathbb{N})$ une suite d'éléments de E ayant les propriétés suivantes :

(i) pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $g_n \geq 0$ et $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} g_n(x) \, dx = 1$,

(ii) pour tout $\delta \in]0, \frac{1}{2}[$, on a $\lim_{n \to \infty} \int_{-\delta}^{\delta} g_n(x) \, dx = 1$.

Montrer que, pour tout $f \in E$, la suite $(f * g_n \mid n \in \mathbb{N})$ converge vers f pour la norme N_∞, c'est-à-dire que l'on a $\lim_{n \to \infty} N_\infty(f * g_n - f) = 0$.

.../...

3 - Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$s_n = \sum_{\substack{\lambda \in \mathbb{Z} \\ |\lambda| \leq n}} \chi_\lambda \quad , \quad S_n = \frac{1}{n+1} (s_0 + \ldots + s_n)$$

a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\int_0^1 S_n(x)\, dx = 1$.

b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \int_{\mathbb{R}} \mathbb{Z}$, on a

$$s_n(x) = \frac{\sin (2n+1)\pi x}{\sin \pi x} \quad , \quad S_n(x) = \frac{1}{n+1} \left| \frac{\sin (n+1)\pi x}{\sin \pi x} \right|^2$$

c) Montrer que, si $|x| \leq \frac{1}{2}$, alors $|\sin \pi x| \geq 2|x|$; en déduire que, pour tout $f \in E$, la suite $(f * S_n \mid n \in \mathbb{N})$ converge vers f pour la norme N_∞.

PARTIE III

Soit f un élément de E ; pour tout $\lambda \in \mathbb{Z}$, on pose

$$\hat{f}(\lambda) = \int_0^1 f(x)\, e^{-2i\pi\lambda x}\, dx = (f \mid \chi_\lambda) .$$

1 - Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n = \sum_{|\lambda| \leq n} \hat{f}(\lambda)\, \chi_\lambda$.

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$|N_2(f_n)|^2 = \sum_{|\lambda| \leq n} |\hat{f}(\lambda)|^2 ,$$

$$|N_2(f - f_n)|^2 + |N_2(f_n)|^2 = |N_2(f)|^2 .$$

b) En déduire que la suite $(N_2(f_n) \mid n \in \mathbb{N})$ tend, dans $\mathbb{R}$, vers une limite L.

2 - Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $F_n = \frac{1}{n+1} (f_0 + \ldots + f_n)$.

a) Pour tout $\lambda \in \mathbb{Z}$, comparer $f * \chi_\lambda$ et $\hat{f}(\lambda)\, \chi_\lambda$; en déduire que la suite $(F_n \mid n \in \mathbb{N})$ converge vers f pour la norme N_∞.

b) Montrer que la suite $(N_2(F_n) \mid n \in \mathbb{N})$ converge vers le nombre $N_2(f)$. En déduire que

$$L = N_2(f) \quad \text{et} \quad \lim_{n \to \infty} N_2(f_n - f) = 0 .$$

3 - Montrer que $f = 0$ si et seulement si $\hat{f} = 0$ (c'est-à-dire $\hat{f}(\lambda) = 0$ pour tout $\lambda \in \mathbb{Z}$).

4 - On suppose qu'il existe un nombre M tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait $\sum_{|\lambda| \leq n} |\hat{f}(\lambda)| \leq M$. Montrer que :

.../...

a) pour tout $x \in \mathbb{R}$, la suite $(f_n(x) \mid n \in \mathbb{N})$ converge, dans $\mathbb{R}$, vers une limite $\varphi(x)$,

b) $\lim_{n \to \infty} \sup_{x \in \mathbb{R}} |\varphi(x) - f_n(x)| = 0$,

c) φ est élément de E,

d) $\varphi = f$ (on pourra utiliser un résultat de la question 2b).

5 - On suppose que f est dérivable et que f' appartient à E. Montrer que, pour tout $\lambda \in \mathbb{Z}$, on a $\widehat{f'}(\lambda) = 2i\pi\lambda\,\hat{f}(\lambda)$. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\sum_{|\lambda| \leq n} |\hat{f}(\lambda)| \leq |\hat{f}(0)| + \frac{\sqrt{2}}{2\pi}\left(\sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda^2}\right)^{1/2} N_2(f').$$

PARTIE IV

1 - Montrer qu'il existe une famille $(Q_k \mid k \in \mathbb{N} \text{ et } k \geq 2)$ d'éléments de E, et une seule, vérifiant les conditions suivantes :

- $Q_2'(x) = x - \frac{1}{2}$ si $0 < x < 1$,
- $Q_{k+1}'(x) = Q_k(x)$ si $0 < x < 1$ et $k \geq 2$,
- $\int_0^1 Q_k(x)\,dx = 0$ si $k \geq 2$.

2 - Montrer que, pour tout entier $k \geq 2$ et tout $\lambda \in \mathbb{Z}$, on a $\widehat{Q_k}(\lambda) = 2i\pi\lambda\,\widehat{Q_{k+1}}(\lambda)$.

3 - Pour tout entier $k \geq 2$ et tout $\lambda \in \mathbb{Z}$, calculer $\widehat{Q_k}(\lambda)$.

4 - Pour tout entier strictement positif q, calculer $Q_{2q+1}(0)$; on pourra utiliser les résultats obtenus à la question III 4.

5 - Pour tout réel $s > 1$, on pose

$$\zeta(s) = \sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda^s} = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \ldots + \frac{1}{\lambda^s} + \ldots$$

Pour tout entier strictement positif q, calculer $\dfrac{\zeta(2q)}{Q_{2q}(0)}$.

6 - Expliciter $Q_2(x)$, $Q_3(x)$ et $Q_4(x)$ pour $0 \leq x \leq 1$. En déduire la valeur de $\zeta(2)$ et celle de $\zeta(4)$.

7 - Pour tout entier $k \geq 2$, calculer $\dfrac{1}{\zeta(2k)} \displaystyle\int_0^1 |Q_k(x)|^2\,dx$; on utilisera un résultat obtenu à la question III 2 b. En déduire la valeur de $\zeta(6)$.

FIN

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail